

Grundlegende Aspekte der speziellen Relativitätstheorie

Peter Reineker

Theoretische Physik
Universität Ulm
89069 Ulm

Kolloquium für Physiklehrende
Universität Ulm, 10. Feb. 2009

Einleitung

Lorentz-Transformation

Anwendungen der Lorentz-Transformation

- Addition von Geschwindigkeiten

- Lorentz-Kontraktion

- Zeitdilatation

Paradoxa

- Zwillingsparadoxon

- Stange-Scheune-Problem

Ausblick

- Dynamik in der speziellen Relativitätstheorie

- Was sieht man bei der Bewegung relativistischer Systeme?

Galilei, G. (1564–1642)

Wesen des Trägheitsgesetzes,
Idee des Relativitätsprinzips

Newton, I. (1643–1727)

Konzeption des absoluten
Raumes und der absoluten Zeit,
Gravitationsgesetz

Michelson, A.A. (1852–1931)

Michelson-Versuch

Lorentz, H.A. (1853–1928)

Teilerkenntnis des Wesens der
Lorentz-Transformation

& Fitzgerald, G. (1851–1901)

Wesentliche Beiträge zur speziellen
Relativitätstheorie

Poincaré, H. (1854–1912)

Minkowski, H. (1864–1909)

Minkowski-Raum: 4-dimensionale
Raumzeit

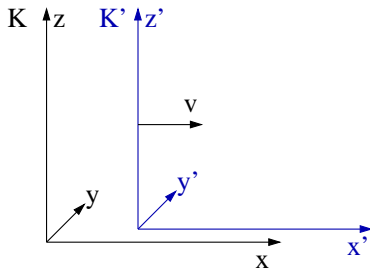
Einstein, A. (1879–1955)

Spezielle Relativitätstheorie (1905)
Allgemeine Relativitätstheorie (1911)

Relativitätsprinzipien

Galilei'sches Relativitätsprinzip

Das **Bewegungsgesetz der Newton'schen Mechanik** als physikalisches Grundgesetz besitzt für zwei Beobachter, die sich in geradlinig-gleichförmig gegeneinander bewegten Inertialsystemen befinden, dieselbe Form.



Galilei-Transformation

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Newton: Zeit und Raum absolut



Invarianz (Kovarianz) der Newton'schen Gleichungen unter Galilei-Transformation

$$m\ddot{x} = f(x - x_0) \quad x - x_0 = x' + vt - x'_0 - vt = x' - x'_0$$
$$\ddot{x} = \ddot{x}'$$

$$m\ddot{x}' = f(x' - x'_0)$$

Gleichungen der Elektrodynamik (Maxwell'sche Gleichungen) sind nicht invariant unter der Galilei-, sondern invariant (kovariant) unter der Lorentz-Transformation

Mechanistisches Weltbild: Äthertheorie

Zulassung verschiedener Prinzipien in der Physik oder Streben nach Vereinheitlichung unter Abänderung der Gleichungen der Mechanik oder der Elektrodynamik?

Spezielles Relativitätsprinzip

Die **Grundgesetze der Physik** besitzen für zwei Beobachter, die sich in geradlinig-gleichförmig gegeneinander bewegten Inertialsystemen befinden, dieselbe Form.

Einleitung

Lorentz-Transformation

Anwendungen der Lorentztransformation

- Addition von Geschwindigkeiten

- Lorentz-Kontraktion

- Zeitdilatation

Paradoxa

- Zwillingsparadoxon

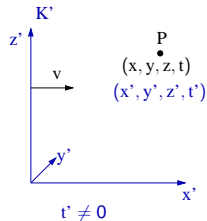
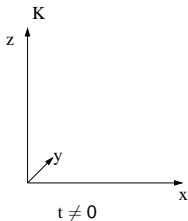
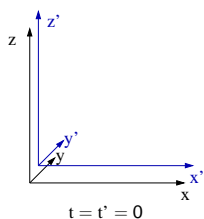
- Stange-Scheune-Problem

Ausblick

- Dynamik in der speziellen Relativitätstheorie

- Was sieht man bei der Bewegung relativistischer Systeme?

Lorentz-Transformation (1)



Prinzipien

- 1 Homogenität und Isotropie des Raumes
- 2 Relativität der Zeit
- 3 spezielles Relativitätsprinzip
- 4 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Lorentz-Transformation (2)

I. Wegen (1: Homogenität und Isotropie des Raumes) wählen wir $x, x' \parallel v$, und $y \parallel y', z \parallel z'$

Koordinatensysteme sollen bei $t = 0$ zusammenfallen

$$z = 0 \rightsquigarrow z' = 0 \rightarrow z' = a(v)z$$

$$x' = b(v)(x - vt)$$

$$y = 0 \rightsquigarrow y' = 0 \rightarrow y' = \bar{a}(v)y$$

$$x = b'(v')(x' + v't')$$

$$\text{Isotropie} \rightsquigarrow \bar{a}(v) = a(v)$$

Zeit wird mittransformiert!

II. Verwendung von (3: Relativitätsprinzip)

Untersuchung von $a(v)$

Punkt ereignis in K:

$$(x, y, z, t) = (0, 0, z, 0)$$

Dasselbe Punkt ereignis in K':

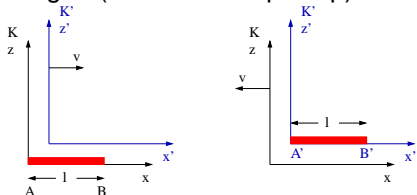
$$(x', y', z', t') = (0, 0, a(v)z, 0)'$$

Durch keine physikalische Messung ist ein Unterschied zwischen K und K' feststellbar $\rightsquigarrow a(v) = 1$

Lorentz-Transformation (3)

III. Untersuchung von $b(v)$, $b'(v')$

Wegen (3: Relativitätsprinzip) muss gelten $|v| = |v'|$



Maßstab der Länge l ruht in K, Messung seiner Länge in K'

Ereignis 1

A: $(0,0,0,t_A)$

A': $(0,0,0,0)'$

Ereignis 2

B: $(l,0,0,t_B)$

B': $(\frac{l}{b'(v)},0,0)'$

Länge: l

Länge: $\frac{l}{b'(v)}$

Lorentz-Transformation (4)

Maßstab der Länge l ruht in K' , Messung seiner Länge in K

Ereignis 1

$$A: (0,0,0,0)$$

$$A': (0,0,0,t'_{A'})'$$

Ereignis 2

$$B: (\frac{l}{b(v)}, 0,0,0)$$

$$B': (l, 0,0,t'_{B'})'$$

$$\text{Länge: } \frac{l}{b(v)}$$

$$\text{Länge: } l$$

(3:Relativitätsprinzip) \leadsto die Messungen dürfen nicht zu einer objektiven Unterscheidung der beiden Koordinatensysteme führen \leadsto

$$b'(v) = b(v)$$

Damit wird

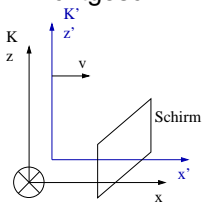
$$x' = b(v)(x - vt) \quad x = b(v)(x' + vt') \quad (*)$$

Auflösen der Gleichungen nach t' ergibt den momentanen Stand der Transformationsgleichungen

$$x' = b(v)(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad t' = b(v) \left[t - \frac{x}{v} \left(1 - \frac{1}{b(v)^2} \right) \right]$$

Lorentz-Transformation (5)

IV. Bestimmung von $b(v)$: Verwendung von (4: Konstanz der Lichtgeschwindigkeit)



Ereignis 1: Lichtsignal zur Zeit $t = 0$ vom Ursprung ausgesandt
Ereignis 2: Beobachtung des Signals am Schirm

Ereignis 1

$$K : (0, 0, 0, 0)$$

$$K' : (0, 0, 0, 0)$$

Ereignis 2

$$K : (x, 0, 0, t)$$

$$K' : (x', 0, 0, t')$$

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in K und $K' \rightsquigarrow x = ct$ and $x' = ct'$

In (*) eingesetzt, dann Multiplikation der Gleichungen

$$ct' = b(v)(ct - vt), \quad ct = b(v)(ct' + vt') \rightsquigarrow \quad c^2 tt' = b(v)^2 (c^2 - v^2) tt'$$

Auflösen nach $b(v)$. Vorzeichen: für $v = 0$ wird $x = x'$; aus (*) folgt $b(0) = +1 \rightsquigarrow$

$$b(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Lorentz-Transformation: Ergebnis

Transformation von K nach K'

$$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Zum Vergleich: Galilei-Transformation von K nach K'

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

Transformation von K' nach K

$$x = \gamma(x' + vt') \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

Zum Vergleich: Galilei-Transformation von K' nach K

$$x = x' + vt' \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t'$$

Einleitung

Lorentz-Transformation

Anwendungen der Lorentz-Transformation

 Addition von Geschwindigkeiten

 Lorentz-Kontraktion

 Zeitdilatation

Paradoxa

 Zwillingsparadoxon

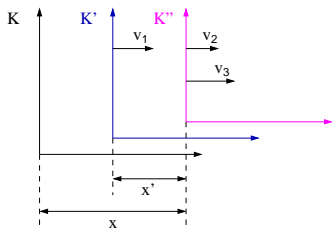
 Stange-Scheune-Problem

Ausblick

 Dynamik in der speziellen Relativitätstheorie

 Was sieht man bei der Bewegung relativistischer Systeme?

Addition von Geschwindigkeiten



$$\begin{aligned}v_1 &= v_{K'K} \\v_2 &= v_{K''K'} \\v_3 &= v_{K''K} \\t &= t' = t'' = 0\end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \left[1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Koordinatenursprünge sollen bei $t = 0$ zusammenfallen.

Zusammenhang zwischen Koordinate des Ursprungs von K'' in $K'(x', t')$ und $K(x, t)$:

$$x = \gamma_1(x' + v_1 t') = \gamma_1(v_2 t' + v_1 t') = \gamma_1(v_1 + v_2)t'$$

$$t = \gamma_1\left(t' + \frac{v_1}{c^2}x'\right) = \gamma_1\left(t' + \frac{v_1}{c^2}v_2 t'\right) = \gamma_1\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)t'$$

$$v_3 = \frac{x}{t} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Eigenschaften der Additionsformel

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

- $v_3 < v_1 + v_2$
- $v_1, v_2 \ll c \rightarrow v_3 = v_1 + v_2$ Galilei
- $v_1, v_2 < c \rightarrow v_3 < c$

Beweis:

$$(c - v_1)(c - v_2) > 0, \quad c^2 + v_1 v_2 - c(v_1 + v_2) > 0 \quad | : c$$

$$c + \frac{v_1 v_2}{c} - (v_1 + v_2) > 0, \quad c \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) > v_1 + v_2$$

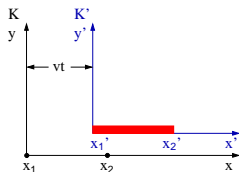
$$c > \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = v_3$$

Beispiel:

$$v_1 = v_2 = \frac{3}{4}c \rightarrow v_3 = \frac{\frac{6}{4}c}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{24}{25}c = 0.96c$$

- $v_2 = c \rightarrow v_3 = \frac{v_1 + c}{1 + \frac{v_1}{c}} = c$

Bewegter Maßstab: Lorentz-Kontraktion (1)



$$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$
$$x = \gamma(x' + vt') \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$$

$$\gamma = \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Koordinatenursprünge sollen bei $t = 0$ zusammenfallen.

1. Messung der Länge des Stabes in einem Inertialsystem, z.B. K'

Ereignis 1: $x_1' = 0, t_1'$ Ereignis 2: $x_2' = l_0, t_1'$ $x_2' - x_1' = l_0$

l_0 Eigenlänge, unabhängig vom Inertialsystem

2. Messung der Länge des in K' ruhenden Stabes in K . System K' bewegt sich mit Geschwindigkeit v nach rechts.

Zur Messung in K sind entlang der x -Achse Beobachter aufgestellt. Zu einer vorgegebenen Zeit t , z.B. $t = 0$, markieren zwei der Beobachter den Anfangs- bzw. Endpunkt, x_1 bzw. x_2 des vorbeifliegenden Stabes. Die Länge in K ist dann $x_2 - x_1$.

Ereignis 1: $x_1, t_1 = 0$
 $x_1' = 0, t_1'$

Ereignis 2: $x_2, t_2 = 0$
 $x_2' = l_0, t_2'$

Aus der Lorentz-Transformation zu berechnen: x_1, t_1', x_2, t_2'

Bewegter Maßstab: Lorentzkontraktion (2)

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) = 0 \xrightarrow{t_1=0} x_1 = 0$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) = l_0 \xrightarrow{t_2=0} x_2 = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Länge des Stabes in K : $x_2 - x_1 = l$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \text{Längenkontraktion}$$

Wichtig: Bei der Messung der Stablänge in K müssen die Ereignisse gleichzeitig in K sein.

Die Zeiten der beiden Ereignisse in K' sind verschieden und damit keine Basis für eine Messung!

$$t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{x_1 v}{c^2} \right) = 0, \quad t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{x_2 v}{c^2} \right) = -\gamma l_0 \gamma^{-1} \frac{v}{c^2} = -\frac{l_0}{c} \frac{v}{c}$$

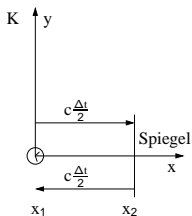
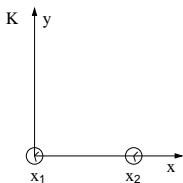
Gleichzeitigkeit ist relativ

Umgekehrte Messung:

Maßstab ruht in K , Messung erfolgt in K' mit $t'_1 = t'_2$.

Ergebnis: Messung des bewegten Stabes zeigt ebenfalls Verkürzung.

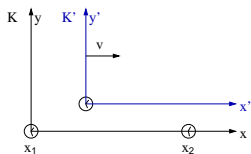
Synchronisation von Uhren



Wie können Zeiten an verschiedenen Orten verglichen werden?

- (1) Transport aller Uhren an den Ort x_1 , Synchronisation, Rücktransport: problematisch, Synchronisation könnte beim Transport verloren gehen.
- (2) Lichtblitz von x_1 nach x_2 und Reflexion. Laufzeit $\Delta t = 2 \frac{x_2 - x_1}{c}$. Dann wird von x_1 zur Zeit t_1 ein Lichtblitz nach x_2 gesandt. Synchronisation der Uhr bei x_2 : Ankunft des Lichtblitzes zur Zeit $t_2 = t_1 + \frac{\Delta t}{2}$

Bewegte Uhr: Zeitdilatation (1)



$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) & y' &= y & z' &= z & t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\x &= \gamma(x' + vt') & y &= y' & z &= z' & t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \\ \gamma &= \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Koordinatenursprünge sollen bei $t = 0$ zusammenfallen.

Zwei Beobachter an den Orten x_1 und x_2 in K mit synchronisierten Uhren lesen die mit K' bewegte Uhr ab, wenn sie an den Orten x_1 und x_2 vorbeikommt.

Es liegen die beiden folgenden Ereignisse vor:

1: Die Uhr in K' passiert Beobachter₁ in K bei $x_1 = 0$ zur Zeit $t_1 = 0$

2: Die Uhr in K' passiert Beobachter₂ in K bei $x_2 = vt_2$ zur Zeit t_2

Ereignis 1: $x_1 = 0, t_1 = 0$
 $x'_1 = 0, t'_1$

Ereignis 2: $x_2 = vt_2, t_2$
 $x'_2 = 0, t'_2$

Lorentztransformation:

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = 0, \quad t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t_2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}t_2$$

→ Ereignis 1: beide Uhren stehen auf null

→ Ereignis 2: bewegte Uhr zeigt $t_0 \equiv t'_2 - t'_1 = t'_2 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}t_2$

Bewegte Uhr: Zeitdilatation (2)

Zeitintervall zwischen den Ereignissen 1 und 2 in K' :

$$t_0 = t'_2 - t'_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t_2$$

Zeitintervall zwischen den Ereignissen 1 und 2 in K :

$$t = t_2 - t_1 = t_2$$

Vergleich beider Zeitintervalle:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{Zeitdilatation}$$

$t_0 < t$: Die mit K' bewegte Uhr geht gegenüber den Uhren in K nach, d.h. die bewegte Uhr geht langsamer.

Eigenzeit

Uhr bewege sich relativ zu Inertialsystem K mit variabler Geschwindigkeit $v(t)$, d.h. beschleunigt. Sie kann nicht mehr zum Ursprung eines Inertialsystems K' gemacht werden.

Ausweg: Einführung eines momentanen Inertialsystems K' zur Zeit t_0 , in dem die Uhr momentan (zum Zeitpunkt t_0) ruht.

Zeitintervall $d\tau$, das von der Uhr zwischen t_0 und $t_0 + dt$ angezeigt wird:

$$d\tau = dt' = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v(t_0)}{c}\right)^2}$$

Zerlegung des Zeitintervalls zwischen zwei Ereignissen in infinitesimale Zeitintervalle und Aufsummation der von der bewegten Uhr angezeigter Intervalle:

Von der bewegten Uhr angezeigte Zeitspanne

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt \quad \text{Eigenzeit}$$

$d\tau$ ist invariant bei Lorentztransformation:

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] = (ds)^2$$

Quadrat des infinitesimalen Abstandes im 4-dimensionalen Raum (Minkowski-Raum)

Abstände im Minkowski-Raum

Untersuchung der Lorentzkontraktion:
Messung in K zu gleichen Zeiten.

Ereignisse in K' zu verschiedenen
Zeiten, sogar Reihenfolge der Zeiten
vertauscht.

Problem mit Kausalität?

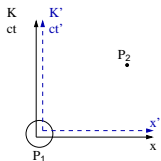
Zwei Ereignisse

Ereignis P_1 : $x_1 = 0, t_1 = 0$

$x'_1 = 0, t'_1 = 0$

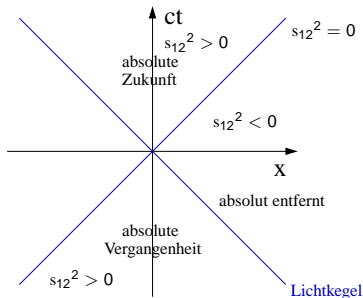
Ereignis P_2 : $x_2 = x, t_2 = t$

$x'_2 = x, t'_2 = t$



Abstand: $s_{12}^2 = c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$

invariant bei Lorentz-Transformation



$s_{12}^2 > 0$ zeitartiger Abstand

$s_{12}^2 = 0$ lichtartiger Abstand

$s_{12}^2 < 0$ raumartiger Abstand

invariant bei Lorentztransformation

Kausalität gewahrt

Einleitung

Lorentz-Transformation

Anwendungen der Lorentztransformation

- Addition von Geschwindigkeiten

- Lorentz-Kontraktion

- Zeitdilatation

Paradoxa

- Zwillingsparadoxon

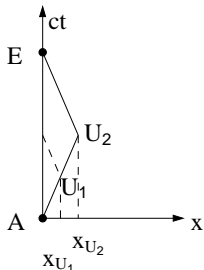
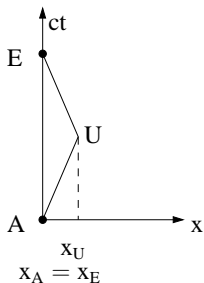
- Stange-Scheune-Problem

Ausblick

- Dynamik in der speziellen Relativitätstheorie

- Was sieht man bei der Bewegung relativistischer Systeme?

Zwillingsparadoxon



Zwilling₁ mit Uhr₁: bleibt auf der Erde zurück
Zwilling₂ mit Uhr₂: fliegt mit Rakete bis x_U und kehrt dann um

Bewegte Uhren gehen langsamer: Uhr₂ zeigt bei E kleineres Zeitintervall an als ruhende. Zwilling₂ ist bei E jünger als Zwilling₁.

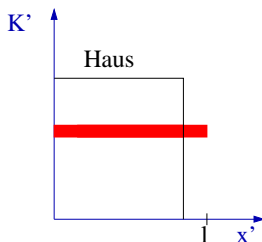
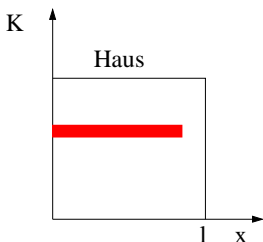
Einwände gegen dieses Ergebnis

- Wechsel des Bezugssystems, d.h. Zwilling₁ bewege sich, Zwilling₂ ruhe: nicht zulässig, da System des Zwilling₂ kein Inertialsystem
- Effekt beruhe nur auf Beschleunigung: Zwilling₁ fliegt mit einer anderen Rakete bis U_1 und kehrt dann um. Beschleunigungseffekte sollten in beiden Flügen gleich sein und sich kompensieren.
- Andere Möglichkeit zur Berechnung? Integration der Eigenzeit entlang der Weltlinien der Zwillinge.

Stange-Haus-Problem

Haus der Länge l im System K ,
Stange der Länge l im bewegten System K'

a) Betrachtung vom System K aus: Länge des Hauses l ,
Länge der Stange $l\sqrt{1-\beta^2}$



b) Betrachtung vom System K' aus: Länge des Hauses $l\sqrt{1-\beta^2}$,
Länge der Stange l

Scheinbarer Widerspruch, Lösung im Zusammenhang mit der
Gleichzeitigkeitsbedingung.

Dynamik in der speziellen Relativitätstheorie

4-komponentige Bewegungsgleichung, deren drei räumliche Komponenten sich im nichtrelativistischen Grenzfall auf die Newton'schen Bewegungsgleichungen reduzieren. Die nullte Komponente hängt mit der Energie zusammen und führt auf die Beziehung $E = mc^2$.

Was sieht man bei relativistisch bewegten Systemen?

Man sieht nicht, was man misst! Bei der Messung werden in einem Inertialsystem zu einem festen Zeitpunkt zwei Ereignisse festgehalten (z.B. Passieren des Anfangs und Endes eines Zuges an zwei Punkten zur selben Zeit).

Beim Sehvorgang spielen die Lichtstrahlen eine Rolle, die zur gleichen Zeit ins Auge treffen. Diese Strahlen können von sehr verschiedenen Teilen des Körpers kommen und damit zu einer deformierten Ansicht führen. Der Effekt ist umso größer, je stärker sich die Geschwindigkeit des Körpers der Lichtgeschwindigkeit annähert.

Monographien

Max Born, Die Relativitätstheorie Einsteins, Springer-Verlag, Berlin, 1969

Albert Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, Springer, Berlin, 1988, Nachdruck 2001

George F.R. Ellis, Ruth M. Williams, Flat and curved space-time, Clarendon Press, Oxford, 1988

Thorsten Fließbach, Mechanik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik I, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1993

Thorsten Fließbach, Allgemeine Relativitätstheorie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1998

A.P. French, Special relativity, Van Nostrand Reinhold (UK) Co. Ltd., Wokingham, 1983

Wolfgang Pauli, Relativitätstheorie, Springer, Berlin, 2000

Hanns Ruder, Margret Ruder, Spezielle Relativitätstheorie, Vieweg, Braunschweig, 1993

Ernst Schmutzer, Relativitätstheorie - aktuell, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979

Ernst Schmutzer, Grundlagen der Theoretischen Physik, Teil II, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989

Frank Steiner (Hrsg.), Albert Einstein, Genie, Visionär und Legende, Springer 2005

Zeitschriften

Ute Kraus, Hanns Ruder, Daniel Weiskopf, Corvin Zahn, Was Einstein noch nicht sehen konnte, Physik Journal 1, Nr. 7/8, 77 (2002)

Elektronische Medien

<http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/sitemap.html>

<http://wase.urz.uni-magdeburg.de/kassner/srt/crashcourse/index.html>

Für die Unterstützung bei der Vorbereitung des Vortrages
danke ich

Thomas Hartmann
Annetraud Scheuing
Christoph Warns

Sven Lustig

Gerold Brackenhofer
Reiner Keller